APRIL/MAY 2023

CMA62/BMA62/UMA62 — REAL ANALYSIS – II

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

SECTION A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL questions.

Shanmuga Industries Arts & Science College
T.V.Malai

1. Define a bounded set.

   வரம்பு கணம் - வரையறு.

2. Give an example of bounded set but not totally bounded.

   வரம்புக்கு உட்பட்ட ஆனால் முழுவதும் வரம்புக்கு உட்படாத கணத்திற்கு ஒரு உதாரணம் கொடு.

3. State the condition for a real valued function on a set to attain its maximum value.

   ஒரு மெய் மதிப்பு சார்பு அதன் பெருமம் அடைவதற்கான நிபந்தனையை கூறு.

4. Define compact metric space.

   அடக்கமான மெட்ரிக் வெளியை வரையறு.

5. Define upper integral.

   மேல் தொகையீடு வரையறு.

6. Compute $\underset{n\to\infty}{lt}\ u[f,\sigma_n]$ for $\left\{0, 1/n, 2/n, \ldots \frac{n}{n}\right\}$.

$\left\{0, 1/n, 2/n, \ldots \frac{n}{n}\right\}$-க்கான $\underset{n\to\infty}{lt}\ u[f,\sigma_n]$ கணக்கிடுக.

7. Does $f(x)=x^2 (0 \le x \le 1)$ obey the hypothesis of Rolle's theorem?

$f(x)=x^2 (0 \le x \le 1)$, ரோலின் தேற்றம் கருதுகோளுக்கு கீழ்படிகிறதா?

8. Find the Taylor series about $x=2$ for $f(x)=x^3+2x+1 \ (-\infty < x < \infty)$.

$f(x)=x^3+2x+1 \quad (-\infty < x < \infty)$ க்கான டெய்லர் தொடரை $x=2$ க்கு கண்டறியவும்.

9. State Dini's theorem.

டினிஸ் தேற்றம் கூறு.

10. Show that $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2} (0 \le x < \infty)$ converges uniformly.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2} (0 \le x < \infty)$-யை சீரான ஒருங்கும் வரிசை என நிரூபி.

20. State and prove the Cauchy criterion for uniform convergence.

சார்புகளின் ஒழுங்கு வரிசையின் சீரான ஒருங்குதலுக்கான கோசி திட்டமான அளவையைக் கூறி நிரூபி.

SECTION C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

16. If T is a contraction on a metric space M then prove that there is one and only one point x in M such that $Tx = x$.

M என்கிற மெட்ரிக் வெளியின் சுருக்கம் T எனில், M -ல் உள்ள ஒரே ஒரு புள்ளி x ற்கு மட்டுமே $Tx = x$ என நிரூபி.

17. If M is a compact metric space, then prove that M has the Heine-Borel property.

M ஒரு கச்சிதமான மெட்ரிக் வெளி எனில், M -ல் கெயின்-போரல் பண்பு உடையது எனக் காட்டு.

18. State and prove chain rule.

சங்கிலி விதியைக் கூறி நிரூபி.

19. If f is continuous on the closed bounded interval $[a,b]$ and if $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ $(a \le x \le b)$ then prove that $F'(x) = f(x)$ $(a \le x \le b)$.

$[a,b]$ என்கிற மூடிய வரம்புறு இடைவெளியில் f ஒரு தொடர்சார்பு மற்றும் $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ $(a \le x \le b)$ எனில் என $F'(x) = f(x)$ $(a \le x \le b)$ நிரூபி.

Shanmuga Industries Arts & Science College
T.V.Malai

SECTION B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions.

11. (a) If f is continuous from a metric space M_1 to M_2 and if M_1 is connected show that the range of f is also connected.

f : M_1 ல் இருந்து M_2 விற்கு செல்லும் ஒரு தொடர் சார்பு மற்றும் M_1 ஒரு இணைந்த மெட்ரிக் வெளி எனில் f -ன் வீச்செல்லையும் இணைந்தது என நிரூபி.

Or

(b) If A is a closed subset of a complete metric space M then prove that A is also complete.

A , M என்கிற முழு மெட்ரிக் வெளியின் மூடிய உட்கணம் எனில் A -யும் முழு மெட்ரிக் வெளி என நிரூபி.

12. (a) Prove that a compact subset of a metric space is closed subset of that metric space.

ஒரு மெட்ரிக் வெளியின் அடக்கமான உட்கணம் அந்த மெட்ரிக் வெளியின் மூடிய உட்கணம் எனவும் நிரூபி.

Or

(b) Prove that a real valued function f continuous on a compact metric space 'M' attains its maximum and minimum at some point of M.

அடக்கமான மெட்ரிக் வெளியான M -ல் உள்ள f என்கிற மெய் மதிப்பு சார்பு M -ல் உள்ள சில புள்ளியில் அதன் பெருமம் மற்றும் சிறுமம் அடையும் என நிரூபி.

13. (a) If $f \in R[a,b]$ and $a<c<b$ then prove that $f \in R[a,c]^{*} f \in R[c,b]$ and $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

$f \in R[a,b]$ மற்றும் $a<c<b$ எனில் $f \in R[a,c]^{*} f \in R[c,b]$ மற்றும் $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ என நிரூபி.

Or

(b) Find $g'(c)$ where $g(x)=x^2 (-\infty < x < \infty)$.

$g(x)=x^2 (-\infty < x < \infty)$ எனில் $g'(c)$ கண்டுபிடி.

14. (a) State and prove the Law of Mean.

சராசரி விதியைக் கூறி நிறுவுக.

Or

(b) State and prove the second mean-value theorem for integrals.

தொகையத்திற்கான இரண்டாம் சராசரி-மதிப்பு தேற்றத்தை கூறி நிறுவுக.

15. (a) If $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ and $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformly, prove that $\{f_n + g_n\}_{n=1}^{\infty}$ converges uniformly.

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ மற்றும் $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ சீரான ஒருங்கல் எனில் $\{f_n + g_n\}_{n=1}^{\infty}$ -யும் சீரான ஒருங்கல் என நிரூபி.

Or

(b) If $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a sequence of functions in $R[a,b]$ converging uniformly to the function f on $[a,b]$. Prove that $f \in R[a,b]$ and $\underset{n\to\infty}{lt} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ என்பது $R[a,b]$ யிலுள்ள சார்புகளின் தொடர் வரிசை, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $[a,b]$-யில் வரையறுக்கப்படும் f என்ற சார்பிற்கு சீராக ஒருங்கும் எனில், $f \in R[a,b]$ மற்றும் $\underset{n\to\infty}{lt} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ எனக் காட்டுக.